

GRADO DE MAESTRO EN EDUCACIÓN
PRIMARIA
CURSO 20/21

RECOPIACIÓN SOBRE ESTRATEGIAS Y
ERRORES DE LAS CUATRO
OPERACIONES BÁSICAS EN LA ETAPA
DE EDUCACIÓN PRIMARIA

REVIEW ON STRATEGIES AND ERRORS
OF THE FOUR BASIC OPERATIONS IN
THE STAGE OF PRIMARY EDUCATION

Autor: Álvaro Gómez Valle

Director: Maitane Pérez Istúriz

Septiembre, 2021

Índice:

| | |
|---|-----------|
| 1. Introducción..... | 5 |
| 2. Las cuatro operaciones básicas | 6 |
| 2.1. Definición y partes de las operaciones | 6 |
| 2.2. Métodos de resolución de las operaciones | 7 |
| 3. Contenidos de la ley en educación primaria..... | 9 |
| 4. Estrategias para realizar operaciones básicas en educación primaria . | 10 |
| 4.1. Definición de estrategia | 10 |
| 4.2. Estrategias de las cuatro operaciones básicas | 11 |
| 4.2.1. Suma | 11 |
| 4.2.1.1. Modelización..... | 11 |
| 4.2.1.2. Conteo | 12 |
| 4.2.2. Resta | 12 |
| 4.2.2.1. Modelización..... | 12 |
| 4.2.2.2. Conteo | 13 |
| 4.2.3. Multiplicación..... | 14 |
| 4.2.3.1. CBC | 14 |
| 4.2.3.2. ABN..... | 15 |
| 4.2.3.3. Retículo | 17 |
| 4.2.4. División..... | 18 |
| 4.2.4.1. Abreviado o estándar | 18 |
| 4.2.4.2. Extendido | 18 |
| 4.2.4.3. Descomposición o expandido en reparto sustractivo | 19 |
| 4.2.4.4. Expandido | 20 |
| 5. Errores identificados en estudios previos | 20 |
| 5.1. Definición de error y dificultades | 21 |
| 5.2. Errores identificados/detectados en estudios previos | 21 |
| 5.2.1. Suma: | 23 |
| 5.2.2. Resta: | 31 |
| 5.2.3. Multiplicación..... | 36 |
| 5.2.4. División..... | 39 |
| 6. Resultados de estudios previos sobre los errores | 44 |
| 6.1. Suma | 44 |

| | | |
|------|--------------------------|----|
| 6.2. | Resta | 47 |
| 6.3. | División..... | 50 |
| 7. | Conclusión | 52 |
| 8. | Referencias | 55 |

Resumen:

Las operaciones básicas son la suma, resta, multiplicación y división. En educación primaria son un pilar fundamental para el desarrollo del alumno, sobre todo con vistas al futuro, y. El aprendizaje de estas operaciones conlleva la existencia de errores, por lo que también se usan diversas estrategias para intentar facilitar su comprensión. Esta investigación identifica las diversas estrategias que pueden seguir los alumnos para hacer las cuatro operaciones básicas y todos los errores que se pueden encontrar como docentes en estas operaciones realizadas por los alumnos. Además, se presentan estudios previos para mostrar resultados de los errores más comunes según el tipo de operación.

Palabras claves: Error, Estrategia, Suma, Resta, Multiplicación, División, Operaciones.

Abstract:

Basic operations are addition, subtraction, multiplication and division. In primary education are a fundamental pillar for the development of the student, especially with views to the future. Learning these operations involves the existence of mistakes, so there are various strategies which are used to try to facilitate their understanding. This research identifies the various strategies that students can follow to do the four basic operations and all the mistakes we can find as teachers in these operations done by the students. Moreover, previous studies are used to show results of the most common mistakes according to the type of operation

Key Words: Error, Strategy, Addition, Subtraction, Multiplication, Division, Operation.

1. Introducción

Este estudio se centra en la recopilación de diversas estrategias y errores de las cuatro operaciones básicas, es decir, suma, resta, multiplicación y división en educación primaria.

La suma se basa en conseguir el total a partir de dos o más sumandos mientras la resta es quitar parte a un número. La multiplicación es sumar el multiplicador tantas veces como lo marca el multiplicando y la división es repartir una cantidad en diversas partes iguales (Martínez & Gutiérrez, 2015). Estas operaciones son importantes ya que son un pilar básico de la sociedad por el hecho de que están presentes en muchas actividades del ser humano (Cisneros, 2011). Los alumnos deben tener un buen conocimiento y manejo sobre estas operaciones para poder desenvolverse sin ningún problema en situación que puedan suceder en su vida diaria en el futuro (Cifuentes, 2020).

Este estudio presenta errores y estrategias de las operaciones básicas encontrados en estudios previos. El hecho de encontrar estos errores puede facilitar la labor de los docentes al conocer los diversos errores que pueden cometer los alumnos y donde deben centrarse más para evitarlos. Además, también aparecen diversas estrategias que pueden facilitar los profesores a sus alumnos para hacer las operaciones del modo que les resulte más sencillo. Por esto, es necesario que cualquier docente conozca varias estrategias para realizar las operaciones para intentar facilitar y mejorar el aprendizaje de los alumnos.

Por todo lo comentado anteriormente, este estudio busca identificar los diversos errores existentes en las operaciones básicas y diversas estrategias para realizarlas de la manera más óptima. Además, este trabajo contiene 7 capítulos. En el capítulo 2, las operaciones, se definen las diversas operaciones, las partes que tiene cada una y la manera de resolver dichas operaciones. El capítulo 3 trata sobre los contenidos que aparecen en el currículo respecto a las operaciones básicas en educación primaria. El capítulo 4 se centra en definir qué es una estrategia y las estrategias existentes para cada operación. El capítulo 5, el más extenso de todos, se define error y dificultades. Además, en este capítulo

también se recogen diversos errores de estudios previos de las cuatro operaciones básicas. El capítulo 6 está relacionado con el anterior ya que muestra los resultados de estudios previos en relación con los errores clasificados anteriormente. Para acabar, el capítulo 7 es la conclusión donde se tratan las ideas más importantes del trabajo.

2. Las cuatro operaciones básicas

Este estudio se centrará en cuatro operaciones: suma, resta, multiplicación y división. Estas operaciones son las más básicas e importantes que se enseñan debido a que se usan constantemente en la vida diaria (Echenique, 2006). Este capítulo trata de presentar las diferentes operaciones que son un elemento fundamental en este trabajo. El apartado 2.1. contiene la definición de cada operación y la definición de las partes de cada operación. El apartado 2.2. trata de la manera más común de realizar estas operaciones, aunque existan otras que serán explicadas más adelante.

2.1. Definición y partes de las operaciones

La suma es conseguir el total a partir de dos o más sumandos. Además, la suma tiene dos partes: los sumandos y el resultado (Martínez & Gutiérrez, 2015).

- Sumandos: parte de la suma que se debe juntar para hallar el resultado.
- Resultado: suma de ambos sumandos.

La resta es quitar parte a un número, el cual en el nivel de Primaria suele ser el más grande. La resta tiene dos partes: el minuendo, sustraendo y la diferencia o resto (Martínez & Gutiérrez, 2015).

- Minuendo: cantidad o número más grande al cual se le quita el sustraendo.
- Sustraendo: cantidad que se quita al minuendo.
- Resto: diferencia entre el minuendo y el sustraendo.

La multiplicación es sumar el multiplicador tantas veces como lo marca el multiplicando. Además, la multiplicación tiene tres partes: multiplicando, multiplicador y producto (Martínez & Gutiérrez, 2015).

- Multiplicando: número que se debe repetir en múltiples ocasiones.
- Multiplicador: cantidad de veces que se repite el multiplicando.
- Producto: resultado de repetir el multiplicando tantas veces como marca el multiplicador.

La división es repartir una cantidad en diversas partes iguales. Además, la división está formada por cuatro partes: el dividendo, divisor, cociente y resto (Martínez & Gutiérrez, 2015).

- Dividendo: número que se divide.
- Divisor: cantidad entre cuanto se divide el dividendo.
- Cociente: resultado de dividir el dividendo y el divisor.
- Resto: número menor que el divisor por lo que no se puede dividir.

2.2. Métodos de resolución de las operaciones

➤ **Suma**

La forma de realizar la suma es colocar un sumando encima del otro, dando igual cual este arriba y cual abajo. Además, los sumandos deben tener que colocarse coincidiendo las unidades con las unidades, decenas con decenas y centenas con centenas. Al ya estar colocados los sumandos correctamente se debe comenzar a sumar empezando desde las unidades y seguir para la izquierda, es decir, hacia las decenas. Además, puede ocurrir que una suma de un número superior a 10 se debe escribir la última cifra del número en el resultado y sumar uno a la columna de su izquierda, es decir, llevarse una.

➤ **Resta**

La manera para hacer la resta ya varia algo respecto a la suma debido a que un número debe colocarse encima. Este número que debe estar encima es el minuendo mientras el sustraendo debe estar abajo. Igual que en la suma estos números deben estar colocados para coincidir las unidades con las unidades,

decenas con las decenas y las centenas con las centenas de cada número. Después de colocarlos deben empezar a restar en la unidad e ir siguiendo para la izquierda. Por otra parte, puede ocurrir que el número del minuendo sea inferior al del sustraendo por lo que tendrá que sumarle al del minuendo diez para poder realizar la operación. Este diez sale de la siguiente cifra del minuendo por lo cual es necesario restarle uno a esa cifra, como se puede observar en el siguiente ejemplo ya que 2 es menor que 8 por lo que le tiene que quitar 1 al 5 de las decenas y así poder sumarle 10 al 2 de las unidades y hacer $12 - 8$. Ocurre lo mismo con el 4 de las decenas por lo que hay que pedir 1 al 4 de las centenas y así sumar 10 para poder hacer $14 - 7$.

$$\begin{array}{r}
 4 \ 5 \ 2 \\
 - 2 \ 7 \ 8 \\
 \hline
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{r}
 4 \ 12 \\
 4 \ \cancel{5} \ 2 \\
 - 2 \ 7 \ 8 \\
 \hline
 4
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{r}
 3 \ 14 \ 12 \\
 \cancel{4} \ \cancel{5} \ 2 \\
 - 2 \ 7 \ 8 \\
 \hline
 1 \ 7 \ 4
 \end{array}$$

Ejemplo 1.

Extraído de Segura (2015)

➤ **Multiplicación**

La multiplicación varía respecto a las anteriores e incluso en ciertos casos conlleva también una suma dentro de la operación. El multiplicando se pone encima del multiplicador. A continuación, la primera cifra que tenga el multiplicador multiplicaría al multiplicando entero y si el multiplicador tuviera más cifras se repetiría el mismo proceso. Los resultados en la primera ocasión se pondrían debajo de la unidad correspondiente, pero en las siguientes cifras del multiplicador se iría empezando un lugar a la izquierda dejando uno en blanco en la derecha. Cuando se acabe de multiplicar el multiplicando por todas las cifras del multiplicador se realizará una suma para hallar el resultado.

➤ **División**

Para realizar la división, hace falta un buen dominio tanto de la resta como de la multiplicación, por lo que es la última operación que se enseña de estas cuatro. Para comenzar hay que coger la parte del dividendo más pequeña empezando por la izquierda que sea superior al divisor, por ejemplo, en $2509:20$

se escogería el 25 ya que el 2 es más pequeño que el 20 y el siguiente número es el 25, el cual si es mayor. A continuación, habría que ir buscando números que multiplicando al divisor se acerque a lo elegido del dividendo. Después de hallar el número, se tiene que poner dicho número en el cociente, multiplicarlo por el divisor y restar a la parte elegida del dividendo. Con el resultado de esa resta es necesario bajar la siguiente cifra del dividendo y repetir el mismo proceso. Alguna ocasión puede suceder que aun bajando la siguiente cifra sea más pequeño por lo que habría que poner un 0 en el cociente y bajar otra cifra.

3. Contenidos de la ley en educación primaria

Este capítulo trata sobre el contenido que aparece en el currículo oficial de Cantabria de educación primaria relacionado con las cuatro operaciones básicas. Dentro del currículo este apartado está centrado en los contenidos y los estándares de aprendizaje evaluable más importantes y repetidos según el currículo en la educación primaria.

Las cuatro operaciones básicas que se imparten en la etapa educativa de educación primaria son: suma, resta, multiplicación y división. Los primeros cursos de educación primaria se centran en ir aprendiendo poco a poco y no todas las operaciones de golpe, sino se empieza por la suma y la resta para en los cursos siguientes enseñar la multiplicación y la división. Después de haber enseñado todas las operaciones se suele seguir impartiendo prácticamente lo mismo en los cursos superiores, aunque aumentando la dificultad.

A continuación, es importante saber qué viene en el currículo respecto a las sumas, restas, multiplicaciones y divisiones en la etapa educativa de primaria. Dentro del currículo oficial de Cantabria según el Decreto 27/2014, está organizado en una tabla dividida en bloques y con tres apartados que son: contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables. Los contenidos que aparecen relacionado con estas operaciones son (BOC, 2016, pág. 191 y 192):

- “Operaciones con números naturales: adición, sustracción, multiplicación y división.

- Las tablas de multiplicar
- Identificación y uso de los términos propios de la división
- Propiedades de las operaciones utilizando números naturales
- Utilización de los algoritmos estándar de la suma, resta, multiplicación y división.
- Multiplicación por la unidad seguida de ceros.”

Además, dentro del currículo también existen los estándares de aprendizaje evaluables. Estos estándares son los conocimientos que deben adquirir los alumnos al haber acabado este curso. Por lo cual, estos estándares son la herramienta utilizada para valorar si los alumnos han adquirido los contenidos mencionados previamente (BOC, 2016, pág. 204 y 205):

- “Realiza operaciones con números naturales de suma, resta, multiplicación y división por una cifra, utilizando y automatizando los algoritmos correspondientes y comprobando los resultados.
- Estima y comprueba resultados mediante diferentes estrategias, valorando la respuesta.
- Identifica y usa los términos propios de la multiplicación y de la división.
- Aplica las propiedades básicas de la multiplicación y división.
- Realiza la prueba de la división con y sin calculadora.
- Multiplica números naturales por 10, 100 y 1000.
- Construye y memoriza las tablas de multiplicar.”

4. Estrategias para realizar operaciones básicas en educación primaria

Este capítulo se centra en las diversas estrategias para realizar las cuatro operaciones básicas. El apartado 4.1. define qué es una estrategia. El apartado 4.2. abarca todas las estrategias posibles existiendo subapartados para cada operación y dentro de ellos también se divide en otros apartados para cada estrategia.

4.1. Definición de estrategia

Una estrategia en ámbito educativo es “un proceso regulable, conjunto de las reglas que buscan una decisión óptima en cada momento” (Real Academia

Española, s.f., estrategia, definición 3). Esta definición es adecuada porque una estrategia normalmente marca cómo hay que realizar algo, es decir, los pasos que hay que seguir para hacerlo de la mejor manera posible según esa estrategia. Las estrategias en el ámbito educativo están pensadas para intentar mejorar el aprendizaje de los alumnos y darles una mayor confianza para que puedan realizar la tarea designada (Carrasco & Reyes, 2019).

4.2. Estrategias de las cuatro operaciones básicas

Hay diversas estrategias que pueden seguir los alumnos para realizar estas operaciones, exactamente sumas y restas. Estas estrategias son la de modelización y el conteo y existen subestrategias dependiendo si se trata de la suma o la resta. La modelización trata sobre el uso de objetos físicos para realizar las operaciones. Mientras el conteo va de contar poco a poco para realizar la operación. Estas estrategias son más usadas para el comienzo del aprendizaje por parte de los alumnos ya que les facilita la comprensión. Tanto la modelización como el conteo son estrategias muy visuales y sencillas para los alumnos al comienzo del aprendizaje (Noda, A. & Bruno, A. 2009). A continuación, se muestran las estrategias de las cuatro operaciones básicas: suma (4.2.1.), resta (4.2.2.), multiplicación (4.2.3.) y división (4.2.4.)

4.2.1. Suma

4.2.1.1. Modelización

La suma conlleva diferentes tipos de estrategia tanto en la modelización como en el conteo y usaríamos la suma $3 + 5$ para poner ejemplos. En lo relacionado a la modelización únicamente existe una estrategia que se basa en contar todo (Noda, A. & Bruno, A. 2009). Esta estrategia se basa en contar todo, es decir, hacer grupos de objetos físicos con la cantidad determinada para realizar la suma. Posteriormente, juntar todos los objetos de ambos grupos con la finalidad de contarlos y hallar el resultado (Llontop & Mendoza, 2020). Por ejemplo, un alumno podría coger un grupo de tres rotuladores y otro de cinco rotuladores. Agruparían todos para contarles y así conseguirían averiguar el resultado correcto de la suma de una manera sencilla.

4.2.1.2. Conteo

Respecto al conteo hay dos estrategias que son contar desde el primero y contar desde el mayor. La estrategia de contar desde el primero se basa en coger el primer número de la suma y añadir contando de uno en uno el otro número de la operación para conseguir hallar el resultado. Un ejemplo para una mejor comprensión es tomar como punto de partida el tres y contar cinco desde él para conseguir hallar el resultado (Noda, A. & Bruno, A., 2009).

La otra estrategia es parecida, pero cogiendo el número más grande en lugar del primero ya que hay que añadir una menor cantidad, lo cual disminuye la probabilidad de error. Un ejemplo para esta estrategia sería que se tomará como comienzo el cinco y después contar tres para hallar el resultado porque al coger el número más grande se disminuye la posibilidad del error (Noda, A. & Bruno, A., 2009).

4.2.2. Resta

4.2.2.1. Modelización

Además, hay estrategias tanto de modelización como de conteo para la resta y aparecerá de ejemplo la siguiente resta: $8 - 3$. Respecto a las estrategias dentro de la modelización hay concretamente cuatro tipos: quitar, añadir, correspondencia uno a uno y quitar hasta. La estrategia de quitar se centra en crear el número más grande, llamado minuendo, a través de diferentes objetos físicos. Después se debe quitar la cantidad de objetos que sea el sustraendo, es decir, el número más pequeño de la resta y de esta manera hallar el resultado. Usando la resta $8 - 3$ como ejemplo sería juntar ocho objetos y quitar tres de ellas para contar la cantidad de objetos restantes (Noda, A. & Bruno, A., 2009).

La estrategia de añadir es justamente lo contrario que la de quitar. Se refiere a que debes hacer el número más pequeño y contar la cantidad de objetos que añades para conseguir el número mayor y conocer el resultado de la resta. Un ejemplo sería juntar tres objetos para representar el tres y añadir los necesarios para hacer el ocho e ir contando cada uno que se añada, lo cual daría el resultado (Llontop & Mendoza, 2020).

Otra estrategia de resta es la correspondencia uno a uno que se basa en ir haciendo ambas figuras a la vez. Cada objeto de las figuras se irá teniendo en cuenta con uno del otro y en el momento que una figura tenga uno más que el otro se empezará a contar la cantidad de objetos de más que tiene en comparación al otro. Un ejemplo de esta estrategia con la resta dicha al principio es hacer un grupo de objetos del minuendo y otro del sustraendo. Cuando ya estén hechos lo que se debe hacer es ir cogiendo un objeto de cada uno hasta que sea imposible porque ya no haya en un grupo y la cantidad de objetos que queden es el resultado (Noda, A. & Bruno, A., 2009).

Por último, otra estrategia de resta usando la modelización es quitar hasta, la cual se basa en hacer dos figuras con la cantidad exacta de objetos correspondientes de cada figura. A continuación, lo que se debe hacer es ir quitando objeto a objeto de la figura que más tiene hasta que ambas tengan la misma cantidad y contar la cantidad de objetos que has quitado para averiguar el resultado. El ejemplo de esta estrategia es hacer un grupo de objetos del minuendo, el ocho, y del sustraendo, el tres. Al ya tener hecho el grupo del ocho debemos ir quitando objetos de uno en uno hasta quedarnos con tres y el resultado sería la cantidad de objetos que hayamos quitado, es decir, cinco (Noda, A. & Bruno, A., 2009).

4.2.2.2. Conteo

Las otras estrategias para la resta son a través del conteo y hay concretamente tres tipos diferentes que son: contar hasta, contar hacia atrás y contar hacia atrás hasta. Este tipo de estrategias son más usadas al principio del aprendizaje de estas operaciones. Contar hasta se basa en empezar a contar desde el sustraendo hasta llegar al minuendo y así se puede saber la diferencia entre ambos, es decir, el resultado. El ejemplo sería que en la resta $8 - 3$ se cogería en el 3 como base para contar y llegar al 8 y los números que se contarían, en este caso, serían 5 (Noda, A. & Bruno, A., 2009).

Otra estrategia es la de contar hacia atrás que se empezaría a contar en el minuendo y contar hacia atrás tantas veces como sea el sustraendo. Por esto, el resultado es la cantidad que quedase después de contar. Un ejemplo para

entenderlo mejor sería con la misma resta que antes, se cogería desde el 8 y se contaría 3 hacia abajo y el número que quedase es el resultado (Llontop & Mendoza, 2020).

Por último, también está la estrategia de contar hacia atrás hasta. En esta estrategia lo que se hace es partir del minuendo y contar hacia abajo hasta llegar al sustraendo y por ello la cantidad que se cuente es el resultado. El ejemplo para comprender esta estrategia con la misma resta sería empezando con el 8 y contar hacia atrás hasta llegar al 3 y el resultado es la cantidad de números que hay entre ambos incluyendo el propio tres (Noda, A. & Bruno, A., 2009).

4.2.3. Multiplicación

Hay una cierta variedad de estrategias para poder hacer las multiplicaciones, pero únicamente se van a tratar tres debido a que son las más sencillas y útiles para facilitar la realización de la multiplicación (Sáez, 2017).

4.2.3.1. CBC

La estrategia más tradicional para hacer las multiplicaciones es el método cerrado basado en cifras, también llamado CBC. Este método se ha mantenido como el más usado en los diversos centros escolares hasta el día de hoy (Pi, 2014). Para empezar, normalmente el multiplicador es el número más pequeño entre él y el multiplicando, pero esto normalmente se coloca de esta manera para que resulte más sencillo hacer la operación (Sáez, 2017).

Después habría que empezar a multiplicar con la cifra del multiplicador por todas las cifras del multiplicando. Además, si el multiplicador tiene más de una cifra se tiene que repetir el proceso con la segunda y siguientes cifras, pero hay una pequeña modificación. Esa modificación se basa en que el primer resultado de la multiplicación de la segunda cifra del multiplicador por la primera del multiplicando debe comenzar debajo de los resultados de la anterior, pero dejando un hueco a la derecha y así con todas sucesivamente (Sáez, 2017). El hueco que se deja se puede observar en el ejemplo ya que los resultados de 87×3 lo comienza a colocar debajo del 3, mientras el resultado de 87×2 lo coloca correctamente debajo del propio 2 del multiplicador o también se puede decir

que lo coloca debajo de las decenas del resultado anterior (César Moisés Grillo Soliz, 2017, 13:10).

Para acabar, todos los resultados que den las multiplicaciones de cada cifra del multiplicador por todas las del multiplicando se deben sumar y así hallar el resultado final de la multiplicación (Sáez, 2017).

$$\begin{array}{r}
 \overset{1}{8}7 \\
 \times 23 \\
 \hline
 \overset{1}{2}61 \\
 + \overset{1}{1}74 \\
 \hline
 2001
 \end{array}$$

Ejemplo 2.

Extraído de César Moisés Grillo Soliz (2017, 13:10)

4.2.3.2. ABN

El método ABN es “una forma de contar y operar con naturalidad propiciando la comprensión global de la matemática, facilitando la racionalidad en las aplicaciones a problemas prácticos.” (Chambi, 2018, pág. 63). La característica principal de este método es buscar un cambio respecto a los modelos tradicionales, como puede ser el CBC (Pari, 2017).

Esta estrategia tiene diversos pasos para poder realizarla correctamente. El primer paso es descomponer el número en centenas, decenas, unidades o cualquier unidad superior a estas. Por ejemplo, el 147 se descompondría en 100 + 40 + 7. El segundo paso es colocar el número descompuesto en una columna de una tabla con dicho número arriba mientras en la otra columna solo estará el multiplicador en la parte superior de la tabla dejando en blanco el resto de las casillas para poder poner un resultado. La tabla que aparecen al final nos muestra que se debe poner en las casillas de la izquierda el 100, debajo el 40 y, para acabar, el 7 (Sáez, 2017).

El tercer paso es multiplicar cada parte descompuesta del número por el multiplicador. El resultado de dichas multiplicaciones se coloca en la casilla de la derecha libre correspondiente. El ejemplo que aparece al final se puede observar cómo multiplica cada parte descompuesta por el multiplicador, como puede ser $100 \times 3 = 300$ y lo pone en su casilla correspondiente. Además, repite la misma elaboración en las siguientes partes descompuestas del multiplicando (Sáez, 2017).

Por último, habría que sumar todos los resultados de multiplicar cada parte descompuesta del multiplicando por el multiplicador. En el ejemplo, los resultados de esas multiplicaciones descompuestas son 300, 120 y 12, las cuales habría que sumarlas y darían 441 (Sáez, 2017).

Segundo paso

| 147 | x3 |
|---------------------------|---------------------|
| multiplicando en unidades | productos parciales |
| 100 | |
| 40 | |
| 7 | |

Tercer paso

| 147 | x3 |
|---------------------------|---------------------|
| multiplicando en unidades | productos parciales |
| 100 → | 300 |
| 40 → | 120 |
| 7 → | 21 |

Cuarto paso

| 147 | x3 |
|---------------------------|---------------------|
| multiplicando en unidades | productos parciales |
| 100 | 300 |
| 40 | 120 |
| 7 | 21 |
| | 441 |

Imágenes

Extraídas de Sáez (2017).

Resumiendo, se multiplica cada parte descompuesta del multiplicando para luego sumarlas. Además, estas multiplicaciones descompuestas suelen ser más sencillas ya que únicamente deben multiplicar una cifra por la del multiplicador y añadir tantos ceros como tenga la parte descompuesta del multiplicando. Para acabar, podemos ver en la siguiente imagen cada parte de la multiplicación (Sáez, 2017).

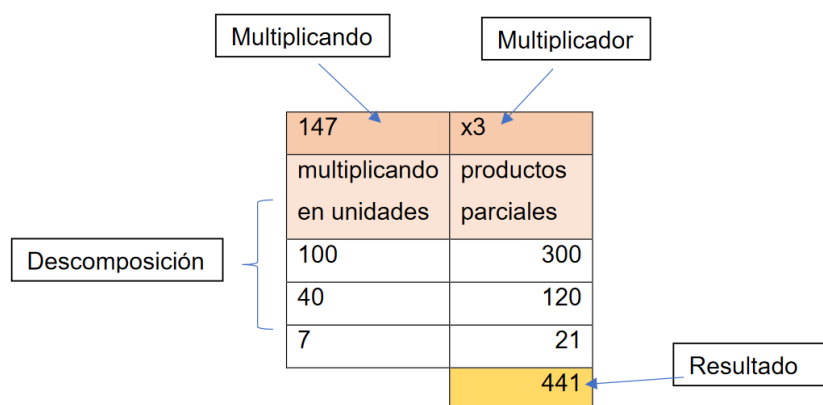
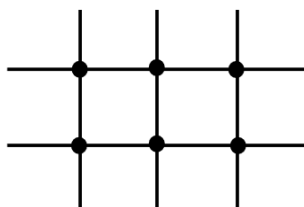


Imagen extraída de Sáez (2017).

4.2.3.3. Retículo

Esta estrategia para realizar las multiplicaciones es bastante diferente a las anteriores debido a la no existencia de números para realizarla. Esta estrategia se basa en que cada número participante en ella, es decir, tanto el multiplicando como el multiplicador en lugar de representarse con números, se hace con líneas. Por otra parte, esta estrategia es más útil para operaciones pequeñas, aunque se pueden realizar operaciones con números mayores de un dígito poniendo más líneas de otra manera diferente. Esta forma de representar es que, si el multiplicando es 2, se colocan dos líneas de manera horizontal mientras si el multiplicador es 3 se harán tres líneas de manera vertical. Las líneas que representan los números se deben cortar y el resultado de la multiplicación es la cantidad de cruces que tengan las líneas entre sí. Por ejemplo, en la operación 2×3 existirán 6 cortes entre las líneas del multiplicando y del multiplicador (Berges, 2019).



Ejemplo 3.

Extraído de Berges (2019)

4.2.4. División

Existen diferentes estrategias para poder hacer las divisiones, concretamente se tratan cinco en este apartado: abreviada o estándar, extendido, descomposición o extendido en reparto sustractivo, descomposición o extendido en reparto distributivo y expandido. A pesar de la existencia de todas estos hay dos que son las más conocidas y utilizadas, sobre todo en lo referido a la educación primaria que son abreviado o estándar y extendido. Estas dos estrategias serán las primeras que se tratarán debido a su mayor importancia en comparación a las otras (Villota, 2014).

4.2.4.1. Abreviado o estándar

La forma más común de realizar la división es la abreviada o estándar, aunque normalmente no es la primera que se realiza debido a que al principio suele ser complicada para los niños. Esta estrategia se basa en que primero se debe elegir las cifras del dividendo que formen el número más pequeño posible que sea mayor al divisor. A continuación, hay que ir multiplicando al divisor por el mayor número posible entre 0 y 9 para que luego se reste a la parte del dividendo correspondiente y quede el menor resto posible. Todo esto hay que hacerlo mentalmente y lo único que se pone en la división es el resto para luego bajar otra cifra y repetir el proceso anterior hasta acabar toda la división.

$$\begin{array}{r} 2405 \quad \text{L} \quad 23 \\ 105 \quad 104 \\ 13 \end{array}$$

Ejemplo 4.

Extraído de Villota (2014)

4.2.4.2. Extendido

La estrategia llamada extendido suele ser la primera manera en la que realizan las divisiones los alumnos cuando lo aprenden. La diferencia principal con la estrategia abreviada o estándar es que en lugar de hacer la resta mentalmente se hace en la propia decisión. La manera en la que se realiza es

colocando el resultado de la multiplicación entre el número del cociente por el divisor justamente debajo de las cifras correspondiente para poder realizar la resta correctamente. El resultado que de esa resta se usaría para seguir realizando la operación bajando la siguiente cifra como se puede observar en el siguiente ejemplo. En el ejemplo se puede ver que realiza $24 - 23 = 1$ y se bajaría la siguiente cifra que es un 0 creando un 10 y de esa manera se seguiría la operación hasta acabarla siguiendo el mismo método.

$$\begin{array}{r}
 2405 \quad \text{L} \quad 23 \\
 - 23 \quad \quad 104 \\
 \hline
 105 \\
 - 92 \\
 \hline
 13
 \end{array}$$

Ejemplo 5.

Extraído de Villota (2014)

A continuación, se tratará las otras estrategias para realizar las divisiones, aunque son más desconocidas y bastante menos usadas que las mencionadas anteriormente. Estas estrategias son algo más complicadas y por ello mismo son menos usadas que las anteriores.

4.2.4.3. Descomposición o expandido en reparto sustractivo

La estrategia de descomposición o expandido en reparto sustractiva es bastante diferente a la que todo el mundo está acostumbrado. Para explicar esta estrategia se usará el ejemplo que aparece abajo. Lo primero que hay que hacer es multiplicar el divisor por una centena cualquiera (100, 200, 300, etc.) que del resultado más cercano a 3496. Después de encontrar el resultado hay que anotar la centena por lo que se ha multiplicado y en este caso es 400. Además, hay que restar el resultado de la multiplicación (400×8) al dividendo, es decir, $3496 - 3200 = 296$. Después habría que ir haciendo lo mismo bajando a las decenas y para acabar las unidades hasta acabar la división. Otro aspecto interesante de esta estrategia es que no sigue el modelo típico de las divisiones si no que se va haciendo de izquierda a la derecha cada operación y se sigue hacia abajo.

$$\begin{array}{r}
 3496 \div 8 \\
 400 \times 8 = 3200 \rightarrow 400 \text{ veces} \\
 3496 - 3200 = 296 \\
 30 \times 8 = 240 \rightarrow 30 \text{ veces} \\
 296 - 240 = 56 \\
 7 \times 8 = 56 \rightarrow 7 \text{ veces}
 \end{array}$$

Ejemplo 6.

Extraído de Villota (2014)

4.2.4.4. Expandido

La estrategia de expandido tiene su parecido a la anterior, pero a diferencia con ella recupera la forma típica de las divisiones. Esta estrategia se basa en que se cogerá al dividendo entero y se multiplicará por una unidad pudiendo ser del 0 al 9 seguida de tantos ceros como haga falta para tener una cifra menos que el dividendo. En el ejemplo se puede observar como la primera multiplicación es $23 \times 100 = 2300$, lo cual es restado a 2405. La operación previa nos muestra que el cociente ya pasa de 100, por lo que habría que seguir la operación. El siguiente paso es buscar un número que multiplique al 23 y se acerque o de 105 para acabar la operación y hallar el cociente y el resto si lo hay.

$$\begin{array}{r}
 2405 \quad \text{L} \quad 23 \\
 - 2300 \quad 104 \\
 \hline
 105 \\
 - 92 \\
 \hline
 13
 \end{array}$$

Ejemplo 7.

Extraído de Villota (2014)

5. Errores identificados en estudios previos

Este capítulo trata sobre los errores que pueden cometer los alumnos en las cuatro operaciones básicas, pero para poder clasificar los diversos errores es necesario definir que es un error y que es una dificultad que aparece en el apartado 5.1. El apartado 5.2. trata de dos tipos de clasificaciones, pero dando

mucha más importancia a la clasificación del error dependiendo de la operación. Además, el apartado 5.2. se divide en cuatro partes para realizar una clasificación de todos los errores de cada operación con la finalidad de que sean clasificaciones más precisas y útiles.

5.1. Definición de error y dificultades

Un error en materia educativa es “concepto equivocado o cosa hecha erradamente” (Real Academia Española, s.f., error, definición 1 y 3). Esta definición muestra que los alumnos se pueden equivocar tanto en el concepto, como puede ser eligiendo las operaciones, como a la hora de realizarlas. El error es una valiosa herramienta pedagógica para el aprendizaje de los diversos contenidos. El motivo por el que es una herramienta útil para el aprendizaje es que debes hacer que los alumnos se den cuenta de estos fallos para intentar que la próxima vez no ocurra, es decir, aprender del error (Collombat, 2013).

Una dificultad en materia educativa es “Inconveniente, oposición o contrariedad que impide conseguir, ejecutar o entender algo bien y pronto” (Real Academia Española, s.f., dificultad, definición 1). Esta definición significa que los alumnos no son capaces de comprender o tardan más en ciertos contenidos por diversos factores.

5.2. Errores identificados/detectados en estudios previos

En los estudios ya existentes hay diversas clasificaciones de los errores en las matemáticas hechas por diferentes autores y enfoques (Engler *et al.*, 2004). Hay muchos tipos de clasificaciones de los errores como pueden ser según el procesamiento de la información o las operaciones que tienen que realizar.

Una de las posibles clasificaciones es según el procesamiento de la información que hace cada alumno, por lo cual tiene importancia en el ambiente didáctico. Esta clasificación distingue cinco tipos de errores que son: errores debido a dificultades de lenguaje, errores debido a dificultades para obtener información especial, errores debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos, errores debidos a asociaciones incorrectas o a

rigidez del pensamiento y errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes. Dentro de todos estos tipos de errores en el que nos centraremos es el error más común y repetido en el ámbito escolar, el cual es el error debido a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento, el cual se centra sobre todo en la nueva información. Es decir, si se acostumbran a un tipo de problema y luego se cambia tendrán problema para codificar y decodificar esa nueva información lo que provoca que les cueste bastante procesarlo (Engler *et al.*, 2004).

Además, dentro de este tipo de error puede haber cinco subtipos: errores por perseveración, asociación, interferencia, asimilación y transferencia negativa (Engler *et al.*, 2004, pág. 27 y 28).

- El error por perseveración consta en que comete un fallo y, a pesar de corregírselo, sigue cometiendo el mismo fallo en las siguientes operaciones. Este fallo también puede ser debido a una falta, lo cual conlleva a otro tipo de error.
- El error de asociación es que se confunden entre algo que se debe hacer en una suma o en una resta y la hacen en otra operación. Por ejemplo, esto puede ocurrir en una resta si piensan que da igual el orden en el que deben colocar los números cuando en realidad el mayor tiene que estar arriba.
- El error de interferencia se centra en que los alumnos se confunden entre las operaciones, es decir, por ejemplo, se pueden confundir entre la multiplicación y la división. Además, este error también engloba los posibles fallos a la hora de realizar el cálculo por los alumnos o en otras situaciones del propio cálculo como son las llevadas.
- El error de asimilación se basa en que los alumnos no han comprendido la tarea o el concepto por no haber estado atentos o por la dificultad de este. Por ejemplo, esto puede ocurrir cuando se está explicando algún concepto, un alumno está distraído haciendo otra cosa y en el momento que deba hacerlo le va a resultar muy difícil al no haber estado atento y, por ello, no haberlo comprendido.

- Por último, el error de transferencia negativa es que cometen un error, el cual no es corregido, y ese error se va repitiendo constantemente en las posteriores tareas. Por ejemplo, cuando se corrige una hoja de sumas por encima y no se ve un fallo, el alumno que ha cometido el fallo lo volverá a cometer pensando que está hecho de una manera correcta.

Otra forma más específica de clasificar los errores que tengan los alumnos en matemáticas es según en qué operación se cometa, lo cual sería una clasificación más detallada que la anterior para el ámbito educativo. Todos estos errores que ocurren a la hora de realizar operaciones matemáticas están dentro del tipo de error explicado anteriormente, es decir, el error debido a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento. Estos errores destacan en las operaciones básicas de matemáticas, es decir, en las sumas, restas, multiplicaciones y divisiones.

5.2.1. Suma:

Para empezar a tratar este tema de los errores algo más centrado a este estudio dentro de todas las operaciones que se tratan, es el turno de la suma y sus respectivos errores.

| Errores de llevadas |
|---|
| <ul style="list-style-type: none"> ➤ No cuenta la llevada ➤ Contar equivocadamente la llevada sumando una de más u olvidándose de una. ➤ Sumar la llevada en todas las columnas siguientes de la operación. |
| Errores de concepto |
| <ul style="list-style-type: none"> ➤ Poner como resultado un número si se repite en esa columna en todos los sumandos. ➤ Restar la llevada en lugar de sumarla ➤ No suma todos los sumandos ➤ Comienza por el lado izquierdo ➤ Resta el número más pequeño al grande en lugar de sumar |

| |
|--|
| <ul style="list-style-type: none"> ➤ Sumar un número, cuando únicamente solo tiene una cifra, a todas las cifras del otro sumando. ➤ Coloca el total de la suma en cada una de las columnas |
| Errores por ceros |
| <ul style="list-style-type: none"> ➤ Poner un "0" como resultado si en esa columna hay un cero y otro número cualquiera. ➤ Omitir una columna con un cero cuando hay una llevada y tenerla en cuenta en la siguiente columna |
| Errores de cálculo |
| <ul style="list-style-type: none"> ➤ Comete un error de cálculo. |
| Errores no diagnosticables |
| <ul style="list-style-type: none"> ➤ No se entiende, es inconsciente |

Tabla 5.2.1.

Tipos de errores en la suma adaptada de (Sánchez, 2013)

➤ **Errores de llevadas**

Un error muy común en todas las edades está relacionado con las llevadas. Hay una gran variedad de errores dentro de las propias llevadas como puede ser el hecho de no contar las llevadas, es decir, no sumarla cuando se debe. Esto se puede observar en el ejemplo que aparece a continuación ya que $7 + 9 = 16$, lo cual provoca que haya una llevada que se debe sumar en la siguiente columna. A pesar de la existencia de esa llevada el alumno hace $4 + 7 = 11$ y se olvida de la llevada provocando un resultado incorrecto porque debería dar 126 en lugar de 116.

$$\begin{array}{r}
 47 \\
 + 79 \\
 \hline
 116
 \end{array}$$

Ejemplo 8.

Extraído de Sánchez (2013)

Otro error relacionado con las llevadas sería contar equivocadamente la llevada. Este error puede provocar que salga un número más grande o pequeño del correcto ya que se puede equivocar tanto añadiendo de más en la llevada como de menos. En el ejemplo que aparece a continuación se puede observar cómo suma $9 + 9 = 18$, por lo cual se llevaría una. Este error se puede observar en el ejemplo que hace $0 + 2 = 2$, en lugar de $0 + 1 = 1$ que sería la forma y respuesta correcta.

$$\begin{array}{r} 809 \\ + \quad 9 \\ \hline 828 \end{array}$$

Ejemplo 9.

Extraído de Sánchez (2013)

El siguiente error que se va a tratar es sumar la llevada en todas las columnas siguientes. Este error provoca que se falle en toda la operación al sumar la llevada en todas las columnas de la suma, exceptuando la primera de donde sale la propia llevada. En el ejemplo se puede observar cómo suma correctamente la llevada en la segunda columna al hacer $0 + 1 = 1$, pero esta llevada ya no debería usarse. El error surge en que también usa esta llevada en la siguiente columna haciendo que $8 + 1 = 9$ provocando una suma incorrecta.

$$\begin{array}{r} 809 \\ + \quad 9 \\ \hline 918 \end{array}$$

Ejemplo 10.

Extraído de Sánchez (2013)

➤ **Error de concepto**

El próximo error es poner como resultado el mismo número si se repite en una columna en todos los sumandos. Este error se basa en que en una suma de dos sumandos pueden tener el mismo número en las unidades. Este error se

puede apreciar en el siguiente ejemplo ya que ambos sumandos tienen en las unidades un 7, por lo cual el alumno pone como resultado otro 7 como si fuese $7 + 7 = 7$. Este error se suele dar a principios del aprendizaje de la suma por la falta de experiencia y control a la hora de realizarla, aunque también puede ocurrir en otros momentos.

$$\begin{array}{r}
 87 \\
 + 257 \\
 \hline
 347
 \end{array}$$

Ejemplo 11.

Extraído de Sánchez (2013)

Otro error que puede existir es restar la llevada en lugar de sumarla. Este error puede ser tanto por un fallo en la llevada o, incluso, en el concepto porque el alumno piense que debe restarla. Normalmente está más relacionado a un fallo puntual debido a un despiste por parte del alumno que a un fallo de concepto. El ejemplo nos permite observar que después de hacer $7 + 8 + 9 = 24$ y llevarse dos de esa operación hace $6 + 5 + 7$ que serían 18 y en lugar de sumar las dos llevadas para que, de 20, lo cual hubiera sido correcto hace $18 - 2 = 16$. La segunda columna del ejemplo también provoca una llevada y se repite el error en la última columna ya que hace $1 - 1 = 0$ en lugar de $1 + 1 = 2$.

$$\begin{array}{r}
 67 \\
 + 58 \\
 \hline
 179 \\
 064
 \end{array}$$

Ejemplo 12.

Extraído de Sánchez (2013)

Otro error es no sumar todos los sumandos. Este error se basa en que al alumno se le olvida sumar alguna cifra de cierta columna provocando que salga

mal la operación. Normalmente este error ocurre en operaciones con bastantes sumandos debido a que los alumnos pueden ir sumando mentalmente y al llevar varias sumas olvidarse de sumar una cifra. El ejemplo siguiente muestra como en las unidades suma $7 + 8 = 15$, pero se olvida de sumar el 9. Por esto, el resultado debería ser $7 + 8 + 9 = 24$. Además, ocurre lo mismo en las decenas ya que suma $7 + 5 = 12$ y se olvida del 6, por lo que la suma debería ser $7 + 5 + 6 = 18$.

$$\begin{array}{r}
 67 \\
 + 58 \\
 \hline
 179 \\
 \hline
 225
 \end{array}$$

Ejemplo 13.

Extraído de Sánchez (2013)

Un error que se puede dar al comienzo del aprendizaje de la suma es comenzar por el lado izquierdo. Este error se debe a un mal aprendizaje de la suma ya que con la práctica este error no se suele cometer. Se puede observar en el siguiente ejemplo ya que suma las decenas $4 + 7 = 11$ y cuenta la llevada de las decenas en las unidades provocando que la suma quede $9 + 7 + 1 = 17$. El hecho de comenzar por la izquierda hace que este mal toda la operación porque las llevadas se hacen de las decenas a las unidades en lugar de hacerlo al revés.

$$\begin{array}{r}
 47 \\
 + 79 \\
 \hline
 117
 \end{array}$$

Ejemplo 14.

Extraído de Sánchez (2013)

Otro error que puede haber es restar en lugar de sumar, tanto la operación entera como el número más grande como pequeño. Este error suele ocurrir en

ciertos despistes que puedan tener los alumnos o por querer hacerla más rápido pueden llegar a confundirse. Este error puede ocurrir en la operación entre restando el segundo sumando al primer sumando como ocurre en $10 + 6 = 4$. Además, pueden confundirse y restar el número más grande con el más pequeño tanto de las decenas como las unidades, lo cual se puede observar en $2 + 7 = 5$ ya que les cambia de orden y hace $7 - 2 = 5$.

| | |
|-----------|------------|
| 10 | 2 7 |
| + | + |
| 6 | 7 2 |
| 4 | 5 5 |

Ejemplo 15.

Extraído de Sánchez (2013)

El siguiente error es sumar un solo dígito de un sumando, cuando únicamente tiene uno, a todos los dígitos del otro sumando. Este error se basa en que un sumando únicamente tiene unidades y ese número que aparece en las unidades se suma a todas las cifras del otro sumando. Por ejemplo, en la operación que aparece abajo el 3 del sumando de abajo se suma tanto al 5, lo cual está correcto, como al 4 de decenas y el 1 de centenas. Este error se suele dar al principio debido a que con una mayor práctica los alumnos saben que deben sumar cada cifra de un sumando con la correspondiente del otro sumando y si no hay ninguna cifra, poner el mismo número teniendo en cuenta las posibles llevadas.

| |
|------------|
| 145 |
| + |
| 3 |
| 478 |

Ejemplo 16.

Extraído de Sánchez (2013)

Otro error que podría suceder y está relacionado con las llevadas es colocar el total de cada suma en el resultado. Este error también suele ocurrir al

principio del aprendizaje de la suma por el hecho de que los alumnos no controlan completamente las sumas y colocan el número entero en lugar de llevarse una. Por ejemplo, en la suma $5 + 7 = 12$, pone en el resultado el 12 y no hace la llevada para sumarlo en las decenas y únicamente poner el 2 en el resultado como debería hacerse.

$$\begin{array}{r} 795 \\ + 897 \\ \hline 151812 \end{array}$$

Ejemplo 17.

Extraído de Sánchez (2013)

➤ Errores por ceros

El siguiente error es poner como resultado un cero si en esa columna hay un cero y otro número cualquiera. Este error se basa en que, al hacer una suma de las unidades, decenas o cualquier columna de los sumandos, si una de ellas es un 0, el alumno pone ese 0 en el resultado sin tener en cuenta el otro número para sumar. El ejemplo que aparece a continuación en las unidades se hace $0 + 6 = 0$, cuando debería hacer $0 + 6 = 6$.

$$\begin{array}{r} 10 \\ + 6 \\ \hline 10 \end{array}$$

Ejemplo 18.

Extraído de Sánchez (2013)

Además, otro error que se puede cometer es omitir una columna con un cero cuando hay una llevada y tenerla en cuenta en la siguiente columna. Este error se basa en que el alumno omite la llevada una columna al existir un cero y la tiene en cuenta en la siguiente columna. Este error es común, sobre todo cuando se intenta hacer una operación rápida, como puede ser $2099 + 1$ debido a que mucha gente contesta 3000 porque pasa la llevada a la siguiente columna

de donde debería cuando el resultado debería ser 2100. El ejemplo que aparece a continuación hace la suma de $7 + 3 = 10$ que provoca la llevada y en lugar de hacerla en la segunda columna hace $0 + 9 = 9$ y usa la llevada en la último haciendo $5 + 4 + 1 = 10$.

$$\begin{array}{r} 507 \\ + 493 \\ \hline 1090 \end{array}$$

Ejemplo 19.

Extraído de Sánchez (2013)

➤ Errores por cálculo

El siguiente tipo de error es error de cálculo. Este error es bastante común y suele ocurrir a cualquier edad y a pesar de tener controladas las sumas ya que todo el mundo puede fallar o despistarse en cualquier momento. El ejemplo muestra como suma $2 + 4$, lo cual debería dar 6, pero se confunde al calcular y le da 7 que provoca que el resultado sea incorrecto.

$$\begin{array}{r} 12 \\ + 4 \\ \hline 17 \end{array}$$

Ejemplo 20.

Extraído de Sánchez (2013)

➤ Error no diagnosticable

Por último, se encuentra el error no diagnosticable, el cual no encaja en ninguno de los errores anteriores y todos aquellos errores que no se pueda ubicar en los tipos anteriores o no tengan sentido lo que hacen irán aquí. Por ejemplo, en la operación siguiente suma $87 + 257$ y le da como resultado 332 cuando en realidad debería dar 344.

$$\begin{array}{r}
 87 \\
 + 257 \\
 \hline
 332
 \end{array}$$

Ejemplo 21.

Extraído de Sánchez (2013)

5.2.2. Resta:

Ahora es el turno de mostrar los diferentes tipos de errores que se pueden producir cuando los niños realizan una resta. Estos errores se organizarán en diferentes grupos y todos los errores integrantes de un grupo tienen un cierto parecido que provoca que se puedan englobar. A continuación, se adjuntará la tabla con los diferentes tipos de errores, los cuales son errores por tomar prestado, errores por sumar en lugar de restar, errores por colocar los números al revés, errores por préstamos con cero, errores por restar el menor al mayor, errores por poner un 0 en lugar de hacer préstamo, errores por no poder hacer frente a la resta, errores de cálculo y errores no diagnosticables.

| Errores por pedir llevada |
|--|
| <ul style="list-style-type: none"> ➤ Pedir prestado, pero no disminuir la llevada. ➤ Solo pedir prestado una vez. ➤ Pedir prestado, pero no disminuir al menos que el inferior sea menor. ➤ Siempre pedir prestado incluso cuando no haga falta. ➤ Olvidar pedir prestado cuando el inferior está en blanco ➤ Dejar en blanco en lugar de pedir prestado ➤ No pedir prestado excepto en la última |
| Errores por colocar los números al revés |
| <ul style="list-style-type: none"> ➤ Poner el minuendo debajo del sustraendo. |
| Errores por llevadas con cero |
| <ul style="list-style-type: none"> ➤ Diferencia de $0 - N = N$. ➤ Diferencia de $0 - N = 0$. ➤ Diferencia de $N - N = N$. ➤ Diferencia de $N - 0 = 0$. |

| |
|---|
| <ul style="list-style-type: none"> ➤ Al pedir prestado cambiar el 0 por 10. ➤ Parar de pedir prestado cuando hay múltiples ceros. |
| Errores por restar el menor al mayor |
| <ul style="list-style-type: none"> ➤ Restar el menor al mayor. ➤ Restar el menor al mayor en lugar de pedir prestado a cero. ➤ Restar el menor al mayor excepto el último. |
| Errores por poner un 0 en lugar de hacer llevada |
| <ul style="list-style-type: none"> ➤ Poner como solución 0, en lugar de pedir prestado. ➤ Poner como solución 0, en lugar de pedir prestado a cero. |
| Errores de cálculo |
| Errores por sumar en lugar de restar |
| Errores no diagnosticables |

Tabla 5.2.2.

Tipos de errores en la resta adaptada de (López & Sánchez, 2009) y (Segura, 2015)

Es necesario comentar y explicar los diferentes tipos de errores que puede haber y en que se basa cada uno de ellos (López & Sánchez, 2009) y (Segura, 2015).

➤ **Errores por pedir llevadas**

Los errores por tomar prestado se centran en las llevadas debido a que en muchas ocasiones los alumnos se pueden confundir con ella. Este error es de los más comunes ya que muchas veces se centran en la resta de las unidades y se olvidan de que por la llevada se debe disminuir en las decenas. Un estudio como el de Segura (2015) demuestra que el error más repetido entre los alumnos está relacionado con tomar prestado, es decir, las llevadas. En el siguiente ejemplo se puede observar que en las unidades comete un error de este tipo debido a que hace $16 - 8 = 8$ de manera correcta. Después de realizar esa resta y haber pedido prestado se olvidó de disminuir la llevada en las decenas, es decir, pide prestado para las unidades y no la disminuye en las decenas sino sigue como si no hubiera existido la que ha pedido prestada.

$$\begin{array}{r} \times 326 \\ - 138 \\ \hline 298 \end{array}$$

Ejemplo 22.

Extraído de Segura (2015)

➤ **Error por colocar los números al revés**

Otro error sería por colocar los números al revés, el cual se refiere a que coloca el sustraendo encima del minuendo, es decir, pone el número más pequeño arriba cuando debería estar abajo.

➤ **Errores por llevadas con ceros**

Después se encontrarían los errores de llevadas con ceros que sería exactamente igual que el primer tipo de error, pero con la única diferencia de que sería exclusivamente cuando habría un cero. Los ceros suelen complicar bastante las operaciones a los alumnos y por ello aumentar los errores. En el siguiente ejemplo se puede observar un error en las unidades. Este error es provocado por la existencia de un cero en el minuendo que provoca que el alumno piense que no hay ninguna operación. Por ello, el alumno realiza la resta como si fuera $0 - 7 = 7$ y no tiene en cuenta que tiene que pedir prestada para que sea 10 y así poder restar.

$$\begin{array}{r} \times 20 \\ - 7 \\ \hline 27 \end{array}$$

Ejemplo 24.

Extraído de Segura (2015)

➤ **Error por restar el menor al mayor**

Otro error sería error por restar el menor al mayor que se basa en que cuando, por ejemplo, una unidad del minuendo es más pequeña que la del sustraendo, restan al sustraendo el minuendo. Se puede observar en el siguiente ejemplo que el error explicado ocurre en las unidades. Este niño en lugar de pedir llevada para hacer $15 - 7$, lo cual sería lo correcto, da la vuelta a la operación y decide restar la cifra más pequeña a la más grande de las unidades por lo que hace $7 - 5$.

$$\begin{array}{r} \text{X} \quad 35 \\ - 17 \\ \hline 22 \end{array}$$

Ejemplo 25.

Extraído de Segura (2015)

➤ **Errores por poner un 0 en lugar de pedir llevada**

El siguiente error sería por poner un 0 en lugar de pedir llevada que se refiere a que en lugar de pedir préstamo y hacer una llevada directamente pone a la resta de esas cifras como otro resultado por el hecho de haber un cero. El ejemplo que aparece a continuación se puede observar claramente este error. Se puede ver que el 6 es menor que el 9 y por lo tanto necesaria pedir una prestada para poder realizar la resta. El problema es que el alumno no lo ve y como ve que es un número más pequeño piensa que $6 - 9 = 0$, en lugar de pedir prestada.

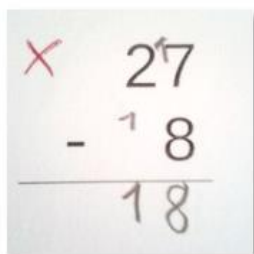
$$\begin{array}{r} \text{X} \quad 16 \\ - 9 \\ \hline 10 \end{array}$$

Ejemplo 26.

Extraído de Segura (2015)

➤ **Errores de cálculo**

El penúltimo grupo de errores sería el error de cálculo que se basa en una confusión de los alumnos a la hora de hacer las operaciones. Como se puede ver en el ejemplo, puede ser que haga que $17 - 8 = 8$ debido a realizarlo demasiado rápido, no pensarlo mucho o, simplemente, que se confunda.



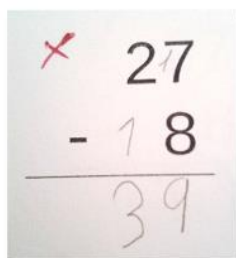
A handwritten subtraction problem on a piece of paper. The problem is $27 - 18$. The result written below the line is 18. A red 'X' is written to the left of the problem, indicating it is incorrect.

Ejemplo 27.

Extraído de Segura (2015)

➤ **Errores por sumar en lugar de restar**

Luego estarían los errores por sumar en lugar de restar que, como su propio nombre indica, es que los alumnos se despistan en alguna parte o en la totalidad de la resta y lo suman en lugar de restarlo. El ejemplo que aparece a continuación muestra claramente un error de este tipo. Ocurre en las decenas ya que después de poner la que se lleva en lugar de hacer $2 - 1 = 1$, lo cual sería lo correcto, realiza una suma quedando $2 + 1 = 3$ provocando este error. Este error es algo curioso ya que únicamente se da en la resta debido a que resulta más fácil sumar que restar.



A handwritten subtraction problem on a piece of paper. The problem is $27 - 18$. The result written below the line is 39. A red 'X' is written to the left of the problem, indicating it is incorrect.

Ejemplo 23.

Extraído de Segura (2015)

➤ **Errores no diagnosticables**

Por último, están los errores no diagnosticables porque no son ninguno de los anteriores, es decir, que no se puede diagnosticar ningún tipo claro de error. Como se puede observar en el ejemplo que a un niño le salga $16 - 9 = 97$ no se puede colocar en ninguno de los errores previos. Además, tampoco se puede encontrar ninguna explicación para que le haya salido este resultado.

$$\begin{array}{r} 16 \\ - 9 \\ \hline 97 \end{array}$$

Ejemplo 28.

Extraído de Segura (2015)

5.2.3. Multiplicación

| Tipos de errores |
|--|
| <ul style="list-style-type: none"> ➤ Confundirse con el resultado de las tablas de multiplicar. ➤ Olvidarse la llevada en el algoritmo de la multiplicación. ➤ Sumar la llevada en la cifra en lugar del producto de la multiplicación parcial. ➤ Multiplicar por columnas. ➤ Colocar erróneamente las filas de los resultados parciales. ➤ Multiplicar $N \times 0 = N$ ➤ Escribir el total de cada multiplicación. |

Tabla 5.2.3.

Tipos de errores en la resta sacada de (Gil, 2016) y (Ávila, 1989)

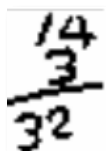
➤ **Error: confundirse con el resultado de las tablas de multiplicar**

El primer error se basa en confundirse al poner el resultado de una operación que aparece en las tablas de multiplicar. Este error se basa en un error de cálculo ya que se confunde al poner el resultado de una multiplicación

concreta. Por ejemplo, el alumno podría poner que $4 \times 3 = 13$ en lugar de poner el resultado correcto que sería $4 \times 3 = 12$ (Gil, 2016).

➤ **Error: olvidarse la llevada en el algoritmo de la multiplicación**

El siguiente error va sobre olvidarse la llevada en el algoritmo de la multiplicación. Este error de llevadas es bastante común en cualquier momento del aprendizaje de la multiplicación. Este error suele ocurrir por el hecho de que se puede despistar al acumular diversas operaciones y no acordarse de que tiene que sumar la llevada. En el siguiente ejemplo se puede observar cómo después de hacer $4 \times 3 = 12$, se olvida en la siguiente de sumarla ya que realiza $3 \times 1 = 3$ y no suma la llevada (Gil, 2016).

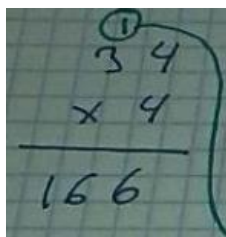

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 3 \\ \hline 32 \end{array}$$

Ejemplo 29.

Extraído de Carrión (2007)

➤ **Error: sumar la llevada en la cifra en lugar del producto de la multiplicación parcial**

Otro error es sumar la llevada en la cifra en lugar del producto de la multiplicación parcial. Este error se basa en que la llevada que se consigue en una parte de la multiplicación se suma en la siguiente cifra del multiplicando, en lugar de sumarlas en el producto de esa cifra por el multiplicador. En el ejemplo siguiente se puede observar claramente como el alumno realiza $4 \times 4 = 16$, por lo que escribe el 6 en el resultado y se lleva una. Esta llevada se la suma directamente al 3 haciendo que sea $4 \times 4 = 16$ y provoque un resultado erróneo cuando en lugar debería haber hecho $3 \times 4 = 12 + 1 = 13$ (Gil, 2016).


$$\begin{array}{r} 34 \\ \times 4 \\ \hline 166 \end{array}$$

Ejemplo 30.

Extraído de Gil (2016)

➤ **Error: multiplicar por columnas**

El siguiente error es multiplicar por columnas. Este error se basa que en lugar de usar una cifra del multiplicador para multiplicar todas las del multiplicando, el alumno utiliza las unidades del multiplicador para multiplicar las unidades del multiplicando. Además, ocurriría lo mismo tanto con las decenas como con todas las siguientes. Por ejemplo, en la multiplicación 20×15 se haría $5 \times 0 = 0$ y $2 \times 1 = 2$ haciendo que quede como resultado 20 (Gil, 2016).

➤ **Error: colocar erróneamente las filas de los resultados parciales**

Otro error sería colocar erróneamente las filas de los resultados parciales. Este error se basa en que no tiene en cuenta el hueco que hace falta dejar en la segunda y siguientes cifras del multiplicador para multiplicar el multiplicando. Estos huecos son necesarios para que la multiplicación salga correctamente debido a que si no se tienen en cuenta saldrá un resultado erróneo. El siguiente ejemplo nos muestra como el 3×6 , el cual es la primera multiplicación de la segunda cifra, coloca el resultado debajo del 4 en lugar de ponerlo debajo del 0 que es donde debería estar (Gil, 2016).

$$\begin{array}{r} 256 \\ \times 39 \\ \hline 2304 \\ 768 \\ \hline 3072 \end{array}$$

Ejemplo 31.

Extraído de Ávila (1989)

➤ **Error: multiplicar $N \times 0 = N$**

Uno de los últimos errores de la multiplicación es multiplicar $N \times 0 = N$. Este error se basa en un error de concepto ya que piensan que un número multiplicado por 0 da ese mismo número, aunque también puede ser un error de cálculo o un error por despiste del alumno. Por ejemplo, en la siguiente operación el alumno realiza $6 \times 0 = 6$, pero como se llevaba una de la operación anterior

hace $6 + 1 = 7$. Esta operación en lugar debería de dar 1 ya que $6 \times 0 = 0$ y $0 + 1 = 1$ (Ávila, 1989).

$$\begin{array}{r} 402 \\ \times 6 \\ \hline 2472 \end{array}$$

Ejemplo 32.

Extraído de Ávila (1989)

➤ **Error: escribir el total de cada multiplicación**

El último error de la multiplicación sería escribir el total de cada multiplicación. Este error se basa que el alumno coloca en el resultado el número entero de cada multiplicación parcial en lugar de poner la cifra de las unidades y llevarse la cifra que aparezca en las decenas para la siguiente columna. La operación que aparece a continuación sirve como ejemplo ya que el alumno realiza $8 \times 6 = 48$ y en lugar de poner únicamente el 8 y 4 sumarle al resultado de la siguiente columna, lo escribe también en el resultado. Para realizar correctamente esta operación debía escribir únicamente el 8 en el resultado y hacer $6 \times 2 = 12$ para sumarle las que se llevaban de la columna anterior, es decir, $12 + 4 = 16$ y quedaría como resultado 168 en lugar de 1248 (Ávila, 1989),

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 6 \\ \hline 1248 \end{array}$$

Ejemplo 33.

Extraído de Ávila (1989)

5.2.4. División

Para acabar, es importante definir los errores de la última operación básica que se enseña. Dentro de esta operación hay pocos errores propios debido a que conlleva el uso de otras operaciones previas como son la multiplicación y la resta. Los errores tanto de la multiplicación como de la resta

no serán explicados en profundidad al haberlos tratado anteriormente. A continuación, se adjuntará una tabla con diversos errores:

| Tipos de errores |
|--|
| <ul style="list-style-type: none"> ➤ Equivocarse al separar las cifras del dividendo para comenzar la división ➤ Elegir un número equivocado para el cociente haciendo que provoque un resto superior al divisor ➤ Omitir ceros en el cociente ➤ Errores al realizar las restas mentalmente con el resultado de la multiplicación previa. ➤ Errores propios de la resta ➤ Errores propios de la multiplicación |

Tabla 5.2.4.

Tipos de errores en la división sacada de (Villota, 2014)

➤ **Error: equivocarse al separar las cifras del dividendo para comenzar la división**

El primer error que se puede dar en la división es que se equivoquen al separar las cifras del dividendo al principio de la división. Este error se basa en que los alumnos fallan al coger el número más pequeño posible del dividendo que sea divisible por el divisor. Puede ocurrir este error de dos maneras diferentes: los alumnos eligen un número más grande o los alumnos eligen un número más pequeño que el propio divisor. Se puede observar en el siguiente ejemplo que en la división $2136 : 2$ se escoge el 21 para empezar la división y eso se representa con la coma que aparece en el ejemplo justo después del 1. El 21 es un número más grande que el divisor, pero no es el número más pequeño que se puede escoger ni hay ningún número entre el 0 y el 9 que multiplicándolo por 2 de como resto un número inferior a 0. Resumiendo, en el ejemplo el alumno debería haber escogido únicamente el 2 para empezar la división en lugar del 21.

$$\begin{array}{r} 21'36 \quad \text{L} \quad 2 \\ 9 \end{array}$$

Ejemplo 34.

Extraído de Villota (2014)

- **Error: elegir un número equivocado para el cociente haciendo que provoque un resto superior al divisor**

El siguiente error trata en elegir un número equivocado para el cociente haciendo que provoque un resto superior al divisor. Este error se basa en que los alumnos cuando tienen que buscar un número para multiplicar al divisor, el cual se acerque lo máximo posible a la parte correspondiente del dividendo. Este error se puede observar con mucha facilidad en el siguiente ejemplo. El alumno elige bien la parte del dividendo por donde debe empezar, pero elige multiplicar el divisor por 4, lo cual queda 16. El problema aparece en que la parte del dividendo elegida es 23 por lo que al restarle 16 queda de resultado 7. Al quedar 7 de resto en esa parte de la división se puede observar que está mal realizada porque no puede quedar un número superior al resto. También significa que podía haber elegido un número aún mayor para el cociente como podría haber sido el 5 haciendo que $5 \times 4 = 20$ y quede de resto 3, lo cual es correcto al ser un número inferior al divisor, el 4.

$$\begin{array}{r} 23'546 \quad \text{L} \quad 4 \\ 75 \quad 4 \end{array}$$

Ejemplo 35.

Extraído de Villota (2014)

- **Error: omitir ceros en el cociente**

Otro error que puede suceder en las divisiones es omitir ceros en el cociente. Este error ocurre cuando después de dividir las primeras cifras u otras de la división y se baja la siguiente cifra, el número que queda es menor que el del dividendo. Muchos alumnos bajan la siguiente cifra sin hacer nada y aquí

está el error ya que deben poner un 0 en el cociente para poder bajar la siguiente cifra. En el ejemplo se puede observar claramente que después de multiplicar $4 \times 5 = 20$ y restárselo a 20 queda 0 por lo que baja la siguiente cifra. Posteriormente queda 4, lo cual es inferior a 5 por lo que no se puede dividir y baja la siguiente cifra para que sea posible, pero se olvida de poner un 0 en el cociente después del cuatro para poder bajar la siguiente cifra. Resumiendo, el cociente de esta operación debería quedar 4092 en lugar del 492 que sale en el ejemplo.

$$\begin{array}{r}
 20464 \quad \text{L} \quad 5 \\
 \underline{046} \quad 492 \\
 14 \\
 4
 \end{array}$$

Ejemplo 36.

Extraído de Villota (2014)

- **Error: errores al realizar las restas mentalmente con el resultado de la multiplicación previa.**

El próximo error es por realizar las restas mentalmente con el resultado de la multiplicación previa. Este error suele ocurrir cuando ya tienen un cierto manejo de las restas, multiplicaciones y divisiones. El manejo de estas operaciones provoca que no pongan el resultado de la multiplicación debajo de la parte del dividendo correspondiente para hacer la resta, sino que la hacen dentro de sus cabezas. El error se basa en que después de haber realizado la multiplicación correctamente, mentalmente o por escrito, a la hora de hacer la resta mentalmente se equivocan. En el ejemplo que aparece a continuación se observa cómo le queda 5 después de restar a 34 el resultado del 7×4 . Una opción del motivo de este error es qué pensará que $7 \times 4 = 28$ y al hacer la resta se confundiera y pensará que $34 - 28 = 5$, cuando en realidad es 6, pero también se puede confundir en el momento de hacer la multiplicación.

$$\begin{array}{r} 34278 \quad \text{L} \quad 7 \\ 52 \quad \quad 4 \end{array}$$

Ejemplo 37.

Extraído de Villota (2014)

➤ **Error: errores propios de la resta**

Uno de los últimos errores son los errores propios de la resta que se han explicado en el apartado 5.2.2. Además, hay una gran variedad de posibles errores de la resta así que puede ser bastante común dentro de esta operación. Por otra parte, en el ejemplo que aparece a continuación se observa un error de la resta ya que al restar $0 - 6$, el alumno piensa que queda igual, es decir, 6. El error viene en que el alumno debería hacer $10 - 6 = 4$. Este tipo de error es parte de los errores por préstamos de ceros.

$$\begin{array}{r} 11068 \quad \text{L} \quad 56 \\ 110'68 \quad \text{L} \quad 56 \\ 6 \quad \quad 1 \\ 1 \times 6 = 6 \text{ a } 0, 6... \end{array}$$

Ejemplo 38.

Extraído de Villota (2014)

➤ **Error: errores propios de la multiplicación**

Por último, también hay errores propios de la multiplicación. Estos errores también se han mencionado anteriormente y es un caso parecido al de la resta ya que puede existir varios errores de la multiplicación dentro de la división. En el ejemplo se ve que el error es que después de hacer la multiplicación por la primera cifra del divisor suma lo que se lleva a la siguiente cifra por lo que el resultado queda como si se multiplicase 9×63 . La forma correcta de realizar esta operación es hacer primero la multiplicación por la segunda cifra y después añadir la cantidad que te llevabas de antes.

$$24754 \quad \text{L} \quad 26$$

$$\begin{array}{r} 247'54 \quad \text{L} \quad 26 \\ 3 \qquad \qquad 9 \end{array}$$

9 x 6 = 54 a 57, 3 llevo 5
5 y 2 = 7, por 9 me da 63; se pasa
entonces a 8.

Ejemplo 39.

Extraído de Villota (2014)

6. Resultados de estudios previos sobre los errores

El capítulo 6 se basa en mostrar los resultados que han tenido diferentes estudios previos sobre los errores en dichas operaciones. Como ocurre en capítulos anteriores, este capítulo se divide en 3 apartados para tratar en cada uno los resultados de una operación diferente, concretamente la suma, resta y división.

6.1. Suma

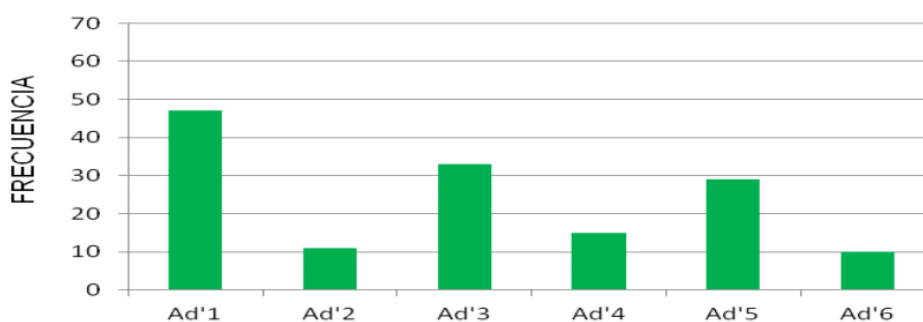
El estudio realizado por Sánchez (2013) se centra en los errores realizados tanto en la suma como en la resta, pero será comentado únicamente los resultados sacados del estudio sobre la suma. Un aspecto necesario de comentar sobre este estudio es que tiene una clasificación distinta por las categorías y su forma de organizar los errores respecto a los grupos y la forma que aparece en la tabla 1. Además, el estudio de Sánchez (2013) fue realizado a través de entregar 20 sumas a 70 alumnos diferentes de tercero de primaria, por lo que se hicieron un total de 1400 sumas y hubo únicamente 145 fallos en total (Sánchez, 2013).

| | transformación | Sintácticos | Valor posicional | Conceptualización del cero | Problemas de conteo | Incoherencia - abandona | |
|-----------------|----------------|-------------|------------------|----------------------------|---------------------|-------------------------|-------|
| Patrón de error | Ad'1 | Ad'2 | Ad'3 | Ad'4 | Ad'5 | Ad'6 | Total |
| Frecuencia | 47 | 11 | 33 | 15 | 29 | 10 | 145 |

Tabla 6.1.1.

Extraída de Sánchez (2013)

A continuación, también podemos observar estos datos mostrados en la tabla anterior representados con una gráfica de barras.



Gráfica 1

Extraída de Sánchez (2013)

Los grupos que aparecen en la tabla anterior están compuestos de una manera diferente a los grupos que aparecen en la tabla 5.2.1. con los mismos errores. El grupo de transformación engloba cinco errores:

- No cuenta la llevada.
- Poner como resultado un número si se repite en esa columna en todos los sumandos.
- No suma todos los sumandos.
- Contar equivocadamente la llevada sumando una de más u olvidándose de una.
- Sumar la llevada en todas las columnas siguientes de la operación.

Otro grupo que aparece en la tabla 6.1.1. es sintácticos, el cual está compuesto por los siguientes tres errores que aparecen en la tabla 5.2.1.:

- Comienza por el lado izquierdo.
- Restar la llevada en lugar de sumarla.
- Resta el número más pequeño al grande en lugar de sumar.

Además, el grupo llamado “valor posicional” por Segura también está compuesto de otra manera con dos errores que aparecen en la tabla 5.2.1.:

- Sumar un número, cuando únicamente solo tiene una cifra, a todas las cifras del otro sumando.
- Coloca el total de la suma en cada una de las columnas

Otro grupo de errores que no corresponde con la organización de errores en la tabla 5.2.1. es conceptualización del cero que está formado por dos errores:

- Poner un “0” como resultado si en esa columna hay un cero y otro número cualquiera.
- Omitir una columna con un cero cuando hay una llevada y tenerla en cuenta en la siguiente columna

El siguiente grupo de errores sería problemas de conteo que en la tabla 5.2.1. es llamado como errores de cálculo.

Por último, el grupo de errores de incoherencia-abandona se refiere al grupo de errores que aparece en la tabla 5.2.1. llamado errores no diagnosticables.

Como podemos observar tanto en la gráfica como en la tabla anteriores, el grupo de errores más habituales es el de transformación. Este grupo de errores ocurrieron un total de 45 veces, por lo que aun siendo el error más repetido se puede observar que los alumnos de tercero de primaria tienen un gran control sobre las sumas. Estos errores ocurrieron 1 vez cada 31 divisiones, lo cual es un porcentaje muy bueno contando que es el fallo más repetido (Sánchez, 2013).

El segundo grupo de errores más repetido sería valor posicional. Estos errores ocurrieron un total de 33 veces en 1400 sumas, por lo que es 1 vez cada 42 divisiones que muestra un buen control de los alumnos (Sánchez, 2013).

El tercer grupo de errores es problemas de conteo. Este error ocurre en 29 ocasiones, es decir, en 1 de cada 48 divisiones, pero posiblemente es el error más común ya que en los grupos anteriores hay varios errores mientras en este únicamente es un error. Es llamativo que este sea, posiblemente, el error más repetido ya que normalmente es provocado por despistes, querer hacerlo demasiado rápido o, simplemente, una confusión en los cálculos (Sánchez, 2013).

El cuarto grupo de errores es conceptualización del cero. Estos errores ocurren un total de 15 veces en las 1400 sumas hechas por los alumnos, es decir, 1 cada 93 sumas, lo cual significa que para ver un error de este tipo encontramos primero 4 hojas de 20 operaciones hechas por los alumnos sin la aparición de este error hasta que aparecería en la quinta hoja (Sánchez, 2013).

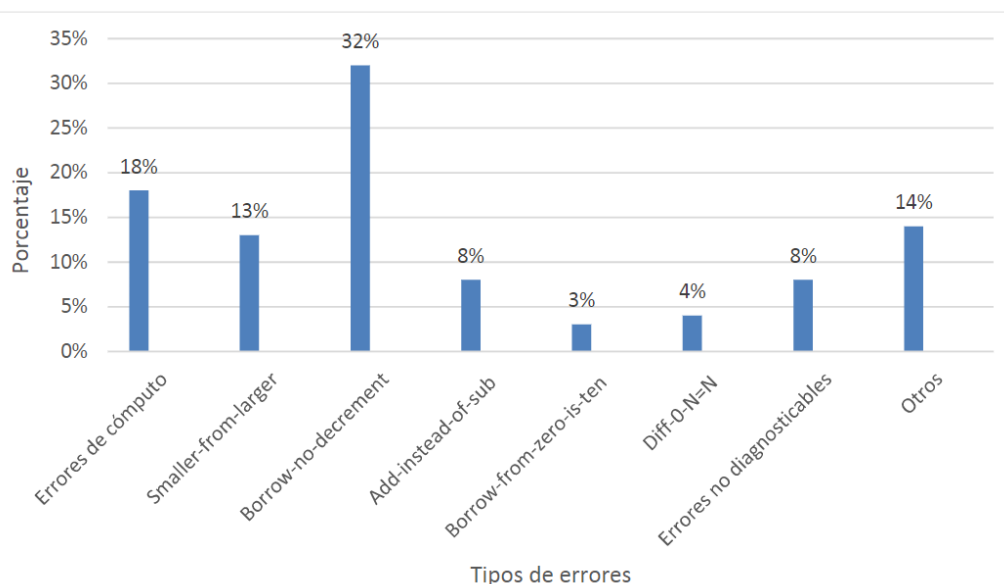
El penúltimo grupo de errores más común es sintáctico. Estos errores ocurren únicamente en 11 ocasiones de las 1400 operaciones, es decir, 1 de cada 127 sumas, lo cual está muy bien al suceder después de muchas sumas (Sánchez, 2013).

El último grupo de errores es incoherencia – abandona, es decir, que no sabe hacerla o no tiene sentido lo que ha hecho. Este error ocurrió en 10 sumas, por lo que ocurre 1 vez cada 140 sumas haciendo que sea el grupo de errores menos común (Sánchez, 2013).

6.2. Resta

El estudio hecho por Segura (2015) trata únicamente los errores de la resta. Este estudio se ha realizado con alumnos de segundo y tercero de educación primaria, concretamente 201 alumnos, de diferentes centros educativos. Cada alumno hizo una ficha con aproximadamente 16 restas realizando un total de 3188 restas. Todas las restas fueron divididas según como se realizaban ya que en este estudio se basaron en dos métodos para hacer la

resta. A continuación, se adjunta una gráfica sacada del estudio donde muestra el porcentaje de los errores más comunes en la resta de las 3188 restas realizadas por los alumnos (Segura, 2015).



Gráfica 1

Extraída de Segura (2015)

El error más común entre las 3188 restas, y con diferencia, es pedir prestado, pero no disminuir la llevada que aparece en la tabla 5.2.2. dentro del grupo de error por las llevadas. Dentro del estudio de Segura (2015) aparece llamado como “borrow-no-decrement”. Este error ocurre en el 32% de las restas realizadas, es decir, ha aparecido en 1020 de las 3188 restas. Este porcentaje es bastante elevado ya que, supuestamente, ocurre en 1 de cada 3 restas (Segura, 2015).

El segundo error que más ha aparecido es errores de cálculo que aparece en la tabla 5.2.2. y en el estudio de Segura (2015) lo llama errores de cómputo. Este error ha ocurrido en el 18% de todas las restas hechas, concretamente son 573 restas. Este error es bastante común, sobre todo porque puede venir provocado por algún despiste del alumno o por una simple confusión. Este error se cometería en 1 de cada 5 o 6 restas (Segura, 2015).

El siguiente error es errores por restar el menor al mayor que está en la tabla 5.2.2., el cual aparece en el estudio de Segura (2015) como “smaller-from-

larger”. Los alumnos cometieron este error en un 13% de las restas realizadas, es decir, en 414 restas. Este error trata sobre restar la cifra de una columna más pequeña a la más grande independientemente de donde este colocada cada una (Segura, 2015).

Otro error es sumar en lugar de restar que aparece en la tabla 5.2.2. mientras en el estudio de Segura (2015) sale como “Add-instead-of-sub”. Este error ocurre en un 8% de las restas, exactamente en 255 restas. Este error se basa en sumar tanto las cifras como puede ser las llevadas en lugar de restarlas (Segura, 2015).

Por otra parte, los errores no diagnosticables ocurren en la misma cantidad que el anterior, y aparece también en la tabla 5.2.2., lo cual significa que, en las 3188 restas, habrá 255 que haya errores no diagnosticables. Estos errores son aquellas restas que no tiene sentido lo que los alumnos han hecho y no se sabe cómo han llegado a hacerlo (Segura, 2015).

El siguiente error es diferencia de 0 – $N = N$ que aparece en la tabla 5.2.2. y en el estudio de Segura (2015) se llama prácticamente igual “Diff-0-N=N”. Este error ocurre en un 4% de las restas, concretamente son 127 (Segura, 2015).

Otro error es “borrow-from-zero-is-ten” que significa que al pedir prestado cambia el 0 por el 10. Este error ocurre en un 3%, es decir, en 95 restas. Este error es el último de los más repetidos en este estudio. Este error no aparece en la tabla 5.2.2. (Segura, 2015).

Para acabar, el resto de los errores que no aparece expresamente su porcentaje están incluidas en otros. Estos errores tienen un porcentaje menor al 3% ya que es el menor porcentaje de un error concreto. El total entre el resto de los errores es de un 14% de aparición en el total de las restas. Este porcentaje significa que hubo 446 errores en las restas que no son los mencionados anteriormente (Segura, 2015).

6.3. División

Ciertos estudios muestran resultados al investigar sobre los errores de la división. Estos resultados normalmente se representan con un gráfico o con una tabla como podemos observar a continuación.

El estudio realizado por Villota (2014) muestra que los alumnos habían realizado 928 divisiones, concretamente cada alumno hizo 29. Estas divisiones fueron realizadas por alumnos de cuarto grado de educación primaria y fallaron en 322 divisiones (Villota, 2014).

| Tipo de error | Manejo de la multiplicación | Estimación (Cociente) | Concepto de división | Proceso para dividir |
|---------------|-----------------------------|-----------------------|----------------------|----------------------|
| Cantidad | 9 | 55 | 20 | 238 |
| Total | 2,80% | 17,08% | 6,21% | 73,91% |

Tabla 6.1.3.

Extraída de Villota (2014)

A diferencia de las categorías mostradas en el estudio de Villota (2014) en la tabla 5.2.4. no hay ninguna categoría concreta, por lo que los errores que aparecen en dicha tabla se pueden relacionar a los grupos de Villota. El grupo de errores llamado manejo de la multiplicación está integrado por dos errores:

- Errores propios de la multiplicación

El siguiente grupo de errores es estimación (cociente) y puede relacionarse con dos errores que aparecen en la tabla 5.2.4.:

- Elegir un número equivocado para el cociente haciendo que provoque un resto superior al divisor
- Omitir ceros en el cociente

Otro grupo de errores sería concepto de división, en el cual se puede relacionar con el siguiente error de la tabla 5.2.4.:

- Equivocarse al separar las cifras del dividendo para comenzar la división

Por último, se encuentra el grupo de errores de proceso para dividir, cuyo grupo donde se puede relacionar los dos siguientes errores en la tabla 5.2.4.:

- Errores al realizar las restas mentalmente con el resultado de la multiplicación previa.
- Errores propios de la resta.

La tabla anterior muestra que la mayoría de los fallos que tienen los alumnos son en el proceso para dividir mientras donde cometen menos errores es en el manejo de la multiplicación (*Villota, 2014*).

La cantidad de fallos en el proceso para dividir es llamativa ya que es casi tres cuartas partes de la cantidad de errores totales que hubo. Estos errores son muy comunes ya que en muchas ocasiones te puedes confundir al hacer la resta mentalmente entre el resultado de la multiplicación del divisor por el número elegido del cociente menos el número del dividendo (*Villota, 2014*).

El siguiente error más habitual que se dio en los estudios sería del grupo de estimación (cociente). Este error sucedió en 55 divisiones de las 928 que realizaron todos los alumnos. Este error ocurrió aproximadamente en 1 de cada 16 divisiones (*Villota, 2014*).

Por otra parte, otro error que se comete en menor medida que el anterior según el estudio de Villota (2014) es por el concepto de la división. Este grupo de errores son aquellos provocados por no saber a la perfección como se debe hacer una división ya que son cosas teóricas. Este error ha ocurrido en 20 divisiones de 928, es decir, en 1 de cada 46 divisiones, lo cual es un porcentaje bastante bajo (*Villota, 2014*).

Por último, es algo llamativo la poca cantidad de fallos en el manejo de la multiplicación ya que es una parte donde bastantes alumnos suelen fallar, pero en este estudio únicamente ha habido 9 divisiones erróneas por este error. El hecho de que haya tan pocos errores puede ser porque los alumnos tengan un mayor control sobre ellas al ser ya el tercer año practicándolas. Dentro de este grupo de errores podría estar confundirse en las tablas de multiplicar, por ejemplo $7 \times 5 = 30$, o también sumar directamente la llevada en la siguiente cifra del multiplicando en lugar de sumarla al resultado (*Villota, 2014*).

7. Conclusión

Este estudio se ha basado en identificar diversas estrategias y errores que se cometen en las cuatro operaciones básicas en educación primaria. El principal objetivo de este estudio es facilitar el acceso a diversas estrategias y errores en las operaciones básicas para satisfacer las necesidades de cualquier docente.

Las estrategias nos muestran una gran diversidad según la operación y como queramos que la realizan. Las estrategias de la suma y la resta se pueden resumir en la modelización, utilización de objetos físicos para representar las cantidades, y el conteo. Un ejemplo de conteo en la suma es contar desde el primero y contar desde el más grande. Otro aspecto importante es que existen muchas más estrategias para la resta en comparación con la suma ya que contando las subestrategias hay 3 de suma mientras en la resta hay 7. Además, también hay diversas estrategias para la multiplicación como son el método tradicional, el método ABN y la retícula, aunque la más habitual es la tradicional. Para acabar, la división también contiene estrategias, concretamente cuatro, que son la abreviada, extendido, descomposición y expandido.

El elemento principal de este trabajo son los errores que se pueden observar dentro de las cuatro operaciones básicas. Gracias a las tablas que aparecen en el capítulo 5 podemos observar que una mayor cantidad diferente de errores en las sumas y en la resta respecto a la multiplicación y división. Los errores en la suma se pueden dividir en cinco grupos: errores de llevadas, errores de concepto, errores por ceros, errores de cálculo y errores no diagnosticables. Los errores de la resta se pueden agrupar en 8 grupos, concretamente: errores por pedir llevada, errores por colocar los números al revés, errores por llevadas con cero, errores por restar el menor al mayor, errores por poner un 0 en lugar de hacer la llevada, errores de cálculo, errores por sumar en lugar de restar y errores no diagnosticables. Podemos observar que en ambos grupos de errores se repite un factor bastante común de fallo que son las llevadas, lo cual es, posiblemente, el motivo que provoca más fallos. Además, estas clasificaciones son las más importantes y pueden servir de base para las siguientes operaciones ya que también están presentes. La suma y sus correspondientes errores pueden presentarse en las multiplicaciones que el multiplicando tenga dos o más

cifras ya que se debe sumar el resultado de la multiplicación de cada cifra del multiplicando por todo el multiplicador. Por otra parte, en la división se encuentran presentes los errores propios de la resta, pero también los de la multiplicación. Los errores de la multiplicación se pueden observar el momento que se ha de multiplicar el divisor por una cifra del cociente para restársela a una parte del dividendo y, por ello, aquí pueden ocurrir tanto los errores de la resta como de la multiplicación.

Además, de los errores de la suma y de la resta también hay clasificaciones de los errores que ocurren en la multiplicación y la división, que han sido mencionados anteriormente, aunque no están divididos por grupos. Hay una menor cantidad de errores comparando con las anteriores operaciones debido a que, como aparece anteriormente, puede aparecer un error de la suma o la resta por tener que hacerlas en esta operación.

Por último, es muy importante tener en cuenta los resultados obtenidos de diversos estudios previos sobre el porcentaje de probabilidad que tiene cada error. Gracias a los resultados de los errores tanto de la suma como de la resta podemos observar que el motivo que más errores provoca en los alumnos son la llevada ya que en la suma ocurre en 47 ocasiones de los 145 errores totales y entre todos los errores de la resta el más repetido con un 32% entre todos los errores es coger la llevada y no quitarla donde habías pedido. Estos datos demuestran que es el principal motivo de equivocación por parte del alumnado y donde más se deberían centrar los docentes para intentar mejorar el aprendizaje de sus alumnos. En la división la mayor cantidad de errores se encuentran en el proceso para dividir, lo cual está relacionado con la resta ya que normalmente se falla en la resta entre el resultado parcial del cociente con la parte del dividendo, provocando que el 73% de los fallos resulten ser por errores propios de la resta, como podrían ser las llevadas, o errores por hacer la resta mentalmente.

Limitaciones e implicaciones futuras

A pesar de poder haber recogido tanto las estrategias como los errores, y los resultados de dichos errores, de las cuatro operaciones básicas de educación primaria no se han encontrado resultados de los errores en la multiplicación.

Por limitación de espacio y tiempo no se ha realizado una investigación de campo con diferentes clases de educación primaria para comprobar los resultados de estudios previos. Como implicaciones futuras se puede realizar esta investigación de campo y completar los errores para la multiplicación. Además, también esta investigación puede servir para comprobar los resultados de los estudios previos sobre las diversas operaciones básicas o, incluso, sacar algún error más que no aparezca en dichos estudios.

8. Referencias

Ávila, A. (1989). Diagnóstico de habilidades computacionales y actividades para remediar los errores. *Educación matemática*, (1), pág. 8. Recuperado de <https://funes.uniandes.edu.co/94557/>

Berges, J. (2019). Diseño y experimentación de una secuencia de enseñanza para introducir el algoritmo de la multiplicación a estudiantes de segundo de Educación Primaria. Grado en Magisterio en Educación Primaria (Graduado). Universidad de Zaragoza, pág. 23. Recuperado de <https://zaguan.unizar.es/record/87997/files/TAZ-TFG-2019-3707.pdf>

Carrasco, W. S., & Reyes, E. P. (2019). Estrategias didácticas que contribuyan al aprendizaje significativo de las cuatro operaciones básicas de la aritmética. Universidad De Guayaquil, pág. 14. Recuperado de <http://repositorio.ug.edu.ec/handle/redug/45365>

Carrión, V. (2007). Análisis de errores de estudiantes y profesores en expresiones combinadas con números naturales. *Revista Iberoamericana De educación matemática*, (11), pág. 26. Recuperado el 1 de agosto de 2021 de <http://funes.uniandes.edu.co/14731/>

César Moisés Grillo Soliz (7 de octubre de 2017). Multiplicación por dos cifras para niños. YouTube [Archivo de Video]. <https://www.youtube.com/watch?v=GDIAVCUhGkw&t=1s>

Chambi, L. (2018). Aplicación de estrategias lúdicas basadas en el método ABN para el desarrollo de la competencia de resolución de problemas de cantidad en las estudiantes del quinto grado de primaria del colegio Santa Rosa de Viterbo en Arequipa. Grado Académico de Maestro en Ciencias (Graduado). Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa, pág. 63-80. Recuperado de:

<http://190.119.145.154/bitstream/handle/UNSA/7273/EDMchhela.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Cifuentes, E. (2020). Enseñanza de las operaciones básicas de los números enteros en grado séptimo. Especialista en pedagogía de la lúdica (Licenciado). Fundación Universitaria Los Libertadores. Recuperado de https://repository.libertadores.edu.co/bitstream/handle/11371/3202/Cifuentes_Edilson_2020.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Cisneros, M. (2011). Las operaciones básicas y su influencia en la resolución de los problemas matemáticos de los alumnos(as) de cuarto año paralelo “A” de la escuela fiscal mixta Colombia, parroquia Alóag. Cantón Mejía, provincia de pichincha. Título en Ciencias de la Educación (Licenciado). Universidad Técnica de Ambato, pág. 15. Recuperado de: http://repositorio.uta.edu.ec/bitstream/123456789/3521/1/tebs_2011_477.pdf

Collombat, Isabelle (2013). La didáctica del error en el aprendizaje de la traducción. CPU-e, Revista de Investigación Educativa, (17),151-152. [fecha de Consulta 25 de agosto de 2021]. ISSN: Disponible en: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=283128329002>

Echenique, I. (2006). Matemáticas resolución de problemas. *Gobierno De Navarra*, (1º Edición), 15–16. Recuperado de http://ceip-parquedelamuneca.centros.castillalamancha.es/sites/ceip-parquedelamuneca.centros.castillalamancha.es/files/descargas/Matematicas_ResolucionProblemasInstrumenta2.pdf

Engler, A., Gregorini, M., Müller, D., Vrancken, S. & Hecklein, M. (2004). Los errores en el aprendizaje de matemática. *Revista Premisa*, 6(23), 27-28.

Recuperado el 10 mayo de 2014 de https://www.researchgate.net/profile/Adriana-Engler/publication/228584198_Los_errores_en_el_aprendizaje_de_matematica/links/55781c2a08aeacff2000cf2a/Los-errores-en-el-aprendizaje-de-matematica.pdf

Gil, C. S. (2016). La multiplicación: Compresión y aprendizaje. Trabajo fin de Grado (Graduado). Universidad de Zaragoza, pág. 18-19. Recuperado de <https://core.ac.uk/download/pdf/289982997.pdf>

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial de Cantabria*, de 5 de junio de 2014, 191-192. <https://boc.cantabria.es/boces/verAnuncioAction.do?idAnuBlob=269550>

Llontop, O., & Mendoza, C. (2020). Grado de Bachiller en educación. Grado de Bachiller en Educación (Graduado). Universidad católica de Trujillo Benedicto XVI, pág. 27-31. Recuperado de: http://190.223.196.26/bitstream/123456789/679/1/018200511K_018200430K_T_I_2020.pdf

López, R., & Sánchez, A. B. (2009). Análisis del error sistemático en la sustracción. *Enseñanza En Las Ciencias*, (21), pág. 54–55. Recuperado de <https://ensciencias.uab.cat/article/view/v27-n1-lopez-sanchez/1569>

Martínez, M. E., & Gutiérrez, K. M. (2015). Dificultades en la ejecución de operaciones de la multiplicación y división y su incidencia en el Rendimiento Académico de los estudiantes de 5to grado del Colegio Público José Domingo Espinoza Parrales. Licenciatura en Pedagogía con Mención a Educación Primaria (Licenciado). Universidad nacional autónoma de Nicaragua, Managua, pág. 13-18. Recuperado de: <https://repositorio.unan.edu.ni/1432/>

Noda, A. & Bruno, A. (2009). Conceptos, estrategias y errores en las operaciones de suma y resta en alumnos con síndrome de down. En González, M.J.; González, M.T. & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 335-336). Santander: SEIEM.

Pari, A. (2017). El método ABN en la enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Revista Scientia*, 6 (1), pág. 103. Recuperado de http://www.revistasbolivianas.org.bo/pdf/risc/v6n1/v6n1_a05.pdf

Pi, R. M. (2014). El método ABN en primero de Primaria. Propuesta de intervención. Grado en Magisterio en Educación Primaria (Graduado). Universidad Internacional de La Rioja, pág. 17. Recuperado de: <https://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/2274/Pi-Gonzalez.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Real Academia Española. (s.f.). Error. En *Diccionario de la lengua española*. Recuperado en 5 de marzo de 2021, de <https://dle.rae.es/?w=error>

Real Academia Española. (s.f.). Estrategia. En *Diccionario de la lengua española*. Recuperado en 5 de marzo de 2021, de <https://dle.rae.es/estrategia>

Real Academia Española. (s.f.). Dificultad. En *Diccionario de la lengua española*. Recuperado el 5 de marzo de 2021, de <https://dle.rae.es/dificultad?m=form>

Sáez, Z. (2017). Dificultades en la resolución de problemas de multiplicar a través del método ABN en cuarto de primaria. Grado en Magisterio en Educación Primaria (Graduado). Universidad de Cantabria, pág. 17-20. Recuperado de <https://repositorio.unican.es/xmlui/handle/10902/13337>

Sánchez, K. L. (2013). Relación entre los errores que cometen los alumnos de tercer grado de Educación Primaria al ejecutar los algoritmos convencionales de la suma y la resta con los contenidos matemáticos de los materiales oficiales, 2013. Licenciatura en Pedagogía (Licenciada). Universidad pedagógica nacional, pág. 34-42 y 124. Recuperado de <http://digitalacademico.ajusco.upn.mx:8080/jspui/handle/123456789/11437>

Segura, J. (2015). La utilización de los algoritmos de sustracción en educación primaria. Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 4 (2), 76-84. Recuperado el 25 de junio de 2021 de <http://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6/article/view/146/139>

Villota, J. L. (2014). División, errores y soluciones metodológicas. Licenciatura en Matemáticas (Licenciado). Universidad de Nariño, pág. 27-29. Recuperado de: <http://sired.udenar.edu.co/298/>